PARALELNOST I HIPERPARALELNOST U HIPERBOLIČKA GEOMETRIJA

PARALLELS AND HYPER-PARALLELS IN HYPERBOLIC GEOMETRY

Učenik: **TAMARA ŠEKULARAC,**
III razred
Matematička gimnazija, Beograd

Mentor: **VESNA RAJŠIĆ,** profesor matematike
Elektrotehnička škola „Nikola Tesla”, Beograd

Regionalni centar za talente- Beograd II
Beograd, april 2012.

REZIME

Razvoj nauke podsticao je razvoj tehnike i doveo do napretka sveukupnog čovečanstva. Veliki broj problema koji se postavljao pred tadašnji učeni svet i naučnike zahtevao je rešavanje mnogobrojnih problema u raznim prirodnim naukama, a među njima i u matematici i geometriji. Izučavanja u oblasti geometrije stara su hiljadama godina. Pokušaji razrešenja pitanja o petom euklidskom postulatu doveli su do osnivanja potpuno nove geometrije koja je ne protivurečna. Ova nova hiperbolička geometrija je tačna koliko i euklidska geometrija. Dokazi do kojih se izučavanjem ove geometrije došlo doprineli su proširenju postojećih znanja i uvođenju potpuno novog pogleda na geometriju. Ova nova saznanja uticala su na potpuno novo, drugačije i kompleksnije sagledavanje odnosa tačke, prave i ravni u prostoru.

Lobačevski je utvrdio da njegova neeuklidska geometrija ima neposrednu primenu kod izračunavanja kosmičkih prostranstava. U okvirima običnih zemaljskih dimenzija kod svih proračunavanja ljudi koriste euklidsku geometriju kao geometriju koja je najjednostavnija i najrealnije odražava stvarnost. Dostignuća u ovoj oblasti govore o tome da se fizički prostori prevelikih dimenzija ponašaju kao neeuklidski prostori. Za njihovo izučavanje potrebne su neeuklidske geometrije odnosno geometrija Lobačevskog.

Ideja o ovom istraživanju o hiperboličkoj geometriji potekla je iz želje da se sazna nešto više o mogućnostima matematičkog i geometrijskog rešavanja prostora, kao o neophodnom znanju bez koga se ne mogu rešavati složeni prostorni problemi u raznim oblastima istraživanja u domenu geometrije, fizike i astronomije.

Ključne reči: hiperbolička geometrija, aksioma Lobačevskog, paralelnost, hiperparalelnost, modeli hiperboličke ravni, primena hiperboličke geometrije

Summary

The development of science encouraged the development of technology and led to the progress of mankind. A great number of problems which scholars and scientists of that time were facing demanded a solution of numerous problems in various natural sciences, among others, in mathematics and geometry. The studies in the field of geometry have been thousands of years old. Attempts of resolving questions about the fifth Euclidian postulate led to the creation of entirely new geometry that is non-contradictory. This new hyperbolic geometry is as accurate as

the Euclidian geometry. The evidence obtained by studying this type of geometry led to the expansion of existing knowledge and to the introduction of a completely new view of the geometry. The new findings influenced a completely new, different and more complex understanding of the relations among dots, lines and planes in space.

Lobachevsky found that his new non-Euclidian geometry has direct application in the calculation of user spaces. In terms of ordinary earthly dimensions in all calculations people use Euclidian geometry as the simplest geometry which reflects reality in most realistic way. Achievements in this area suggest that physical spaces of too large dimensions behave as non-Euclidian spaces. Their study requires non-Euclidian geometries, i.e. Lobachevskian geometry.

The idea of this research on hyperbolic geometry came from a desire to learn more about the possibilities of mathematical and geometrical solution of space, as the knowledge necessary to solve complex spatial problems in various areas of research in the field of geometry, physics and astronomy.

Key words: hyperbolic geometry, the axiom of Lobachevsky, parallelism, hyper-parallelism, models of the hyperbolic planes, the application of hyperbolic geometry

UVOD

Područje istraživanja u ovom radu je hiperbolička geometrija koja je definisana u trećoj deceniji XIX veka. Ovom teorijom se po prvi put u svetu geometrije u kome se do tada u potpunosti moglo osloniti na intuiciju zasnovanu na predstavama koje stvaraju čula, zakoračilo u svet koji postoji izvan dohvata našeg iskustva.

Predmet istrživanja ovog rada je:

- analiza i istraživanje o hiperboličkoj geometriji,
- istraživanje o hiperboličkoj geometriji kroz istoriju,
- istraživanje aksiome Lobačevskog i njenih posledica,
- istraživanje o podudarnost trouglova,
- istraživanje o paralelnosti i hiperparalelnosti pravih,
- istraživanje o hiperboličkom prostoru.

Cilj istraživanja u ovom radu je:

- teorijska analiza u smislu primene saznanja o hiperboličkoj geometriji u savremenom istraživanju,
- sagledavanje i utvrđivanje primene hiperboličke geometrije,
- istraživanje i opisivanje međusobnog odnosa tačaka, pravih i ravni u hiperboličkom prostoru,
- afirmacija hiperboličke geometrije koja još uvek iznova potvrđuje svoju aktuelnost.

Za istraživanje u okviru rada o hiperboličkoj geometriji koristiće se sledeće metode istraživanja:

- analiza podataka iz prikupljene literature o ovoj problematici,
- analiza prethodnih istraživanja u ovoj oblasti uz obradu podataka dobijenih prethodnim analizama i sistematizacijom podataka,
- dokazivanje međusobnih odnosa i relacija tačaka, pravih i ravni u hiperboličkom prostoru,
- metod zaključivanja iz prethodnih činjenica o opštem saznanju.

Rezultati istraživanja o hiperboličkom prostoru i njegovoj primeni u matematici i ostalim prirodnim naukama i savremenim tehničkim dostignućima biće prikazani kroz sumiranje i interpretaciju prethodnih saznanja i novih zaključaka do kojih se ovim istraživanjem došlo.

HIPERBOLIČKA GEOMETRIJA

Od Euklidovih vremena pa sve do prve polovine XIX veka u osnovima geometrije ništa se suštinski nije promenilo. Peti Euklidov postulat nam govori da: „ Postoje tačka B i prava *a* koja je ne sadrži takve da u njima određenoj ravni ne postoji više od jedne prave koja sadrži tačku B, a sa *a* nema zajedničkih tačaka.”. Mnogi pokušaji da se razreši pitanje petog Euklidovog postulata, naročito krajem XVIII i početkom XIX veka ostali su bez uspeha. Naučnici toga doba pokušali su da redukuju Euklidovu aksiomatiku izostavljanjem petog Euklidovog postulata iz spiska osnovnih stavova, kao suvišnog. U jednoj recenziji iz 1816. godine Gaus piše: „ Malo je predmeta u području matematike u kojima se toliko pisalo koliko o nedostatku kod utvrđivanja

teorije paralela. Retko prođe koja godina da ne izađe kakav nov pokušaj kako bi se ta praznina ispunila. A ipak, ako hoćemo da govorimo otvoreno i pošteno, ne možemo kazati da smo u suštini te stvari otišli dalje od Euklida pre 2000 godina.” .

Teorijom paralela bavili su se istaknuti matematičari toga doba poput Dalambera, Laplasa i Lagranža. Pred kraj svoga života Lagranž je pripremio jednu interesantnu raspravu u kojoj je na samom početku svoga izlaganja izjavio samo sledeće: „Moram o tome još da razmislim.”. Nije prošlo još mnogo vremena do konačnog rešenja ovog problema. Rasvetljenje ovog problema, bilo je u neskladu sa predrasudama koje su vekovima ograničavale generacije Euklidovih sledbenika.

Zamisli i rešenja do kojih su ovi matematičari došli nisu krunisani zasluženim uspehom za njihovog života. Samo je Gaus razumeo dalekosežnost njihovih ideja budući da su se one podudarale sa njegovim zamislima od kojih su neke nastajale trideset godina. Interesantno je to što je Gaus znao za radove obojice osnivača hiperboličke geometrije, no ni jednog od njih nije upoznao sa rezultatima rada onog drugog. Boljaj je saznao za rad Nikolaja Lobačevskog tako što je do njega dospela jedna njegova rasprava o ovoj problematici. Lobačevski nikada nije saznao za rad Boljaja na ovom polju geometrije.

Aksiome apsolutne geometrije

U hiperboličkoj geometriji prve četiri grupe aksioma se ne razlikuju od aksioma u euklidskoj geometriji. Ove prve četiri grupe aksioma predstavljaju aksiome apsolutne geometrije i dele se na:

I. aksiome pripadanja,
II. aksiome rasporeda,
III. aksiome podudarnosti i
IV. aksiome neprekidnosti.

Aksioma Lobačevskog

Aksioma Lobočevskog karakteriše hiperboličku geometriju i glasi:

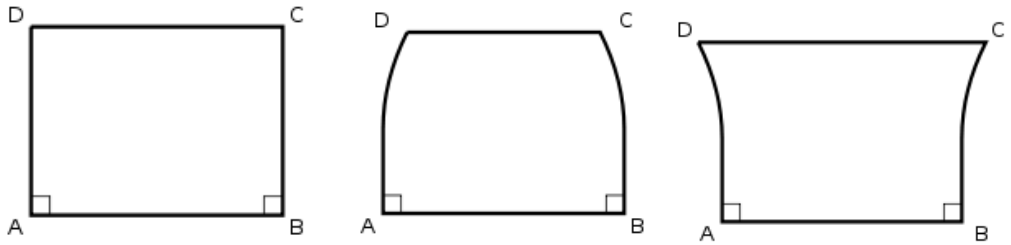
Aksioma VL: Postoje tačka B i prava *a* koja je ne sadrži takve da u njima određenoj ravni postoji više od jedne prave koja sadrži B, a sa *a* nema zajedničkih tačaka.

Prostor u kome su zadovoljene aksiome hiperboličke geometrije nazivamo hiperbolički prostor ili prostor Lobačevskog, a svaku njegovu ravan hiperboličkom ravni ili ravni Lobačevskog.

Lambertov četvorougao predstavlja četvorougao kod koga su tri ugla prava.

Skica 1. –Lambertov četvorougao

Sakerijev četvorougao predstavlja četvorougao ABCD kod koga su uglovi kod temena A i B pravi, ivice BC i AD međusobno podudarne i nalaze se sa iste strane ivice AB.



Skica 2. – Sakerijevi četvorouglovi

Ležandrova teorema:

1° zbir unutrašnjih uglova bilo kojeg trougla nije veći od π,

2° ako postoji trougao kome je zbir unutrašnjih uglova π onda je zbir unutrašnjih uglova svakog trougla takođe π,

3° postoji trougao kod koga je zbir unutrašnjih uglova π, ako i samo ako svaka prava upravna na jednom kraku bilo kojeg oštrog ugla seče drugi krak tog ugla,

4° postoji trougao kod koga je zbir unutrašnjih uglova π, ako i samo ako za svaku tačku B i pravu a koja ne sadrži, u njima određenoj ravni postoji jedinstvena prava b, koja sadrži B i sa a nema zajedničkih tačaka.

Na osnovu Ležandrove teoreme sledi:

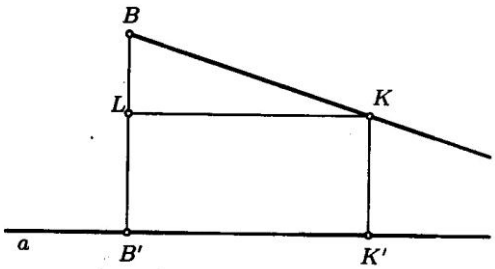
Teorema 1.: Postoji šest iskaza koji su ekvivalenti aksiome Lobačevskog i to su:

1. Ugao paralelnosti je oštar.
2. Zbir unutrašnjih uglova svakog trougla je manji od π.
3. Zbir unutrašnjih uglova svakog prostog, ravnog četvorougla je manji od 2π.
4. Uglovi na protivosnovici Sakerijevog četvorougla su oštri.
5. Jedan ugao Lambertovog četvorougla je oštar.
6. Postoji prava u ravni oštrog ugla koja je upravna na jednom kraku tog ugla a ne seče njegov drugi krak.

Paralelnost pravih

U apsolutnoj geometriji bilo je moguće dokazati osnovne osobine paralelnih pravih, pre svega osobine transmisibilnosti, simetričnosti i tranzitivnosti relacije paralelnosti. Hiperboličku geometriju karakterišu neke osobine paralelnih pravih kojima se ona bitno razlikuje od euklidske geometrije. U euklidskoj geometriji koplanarne prave su bile paralelne ako i samo ako su disjunktne, a svaka ekvidistanta je bila prava. U hiperboličkoj geometriji osobine paralelnih pravih se sustinski razlikuju od navedenih.

Teorema 10.: Ako je B teme proizvoljne poluprave paralelne nekoj pravoj a, K proizvoljna tačka te poluprave, a B' i K' podnožja upravnih iz B i K na pravoj a, onda je $\mathrm{LB}' < BB'$.

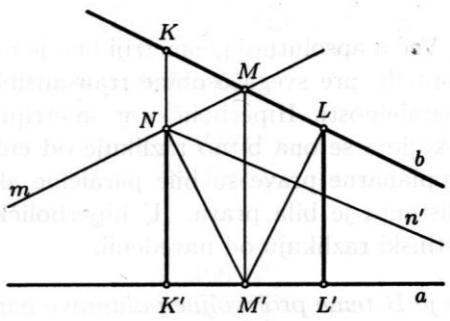


Skica 3. – Poluprava paralelna pravoj a

Dokaz: Neka je L tačka poluprave (B'B) takva da je $\mathrm{LB}' \cong \mathrm{KK}'$ budući da su u četvorouglu $\mathrm{B'K'KL}$ uglovi kod temena B' i K' pravi, a ivice LB' i KK' međusobno podudarne, uglovi kod temena K i L biće međusobno podudarni i oštri (skica 3.). Kako je uz to

ugao BKK' tup jer je njemu naporedni ugao oštar, tačka L pripada uglu BKK', dakle i duži BB'. Na osnovu ovoga izvodimo zaključak $\mathrm{KK}' \cong \mathrm{LB}' < B\mathrm{B}'$.

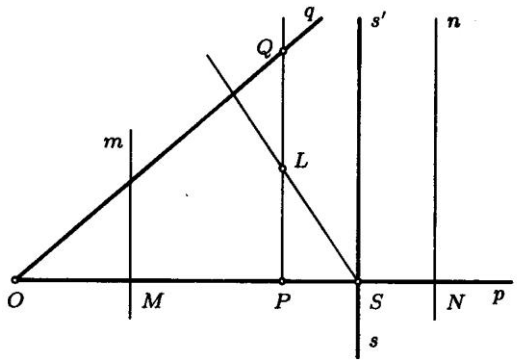
Teorema 11.: Ako su a i b međusobno paralelne prave, a l proizvoljna duž, tada na pravoj b postoji jedinstvena tačka L kojoj je L' podnožje upravne na pravoj a, takva da je $\mathrm{LL}' \cong l$.



Skica 4. – Rastojanje izmedju paralelnih pravih

Dokaz: Neka je K proizvoljna tačka prave b, K' njena upravna projekcija na pravoj a, a N tačka (K'K) takva da je $\mathrm{NK}' \cong l$ (skica 4.). Pretpostavimo da su tačke K i N međusobno različite, budući da bi u suprotnom dokaz teoreme bio završen. Obeležimo sa n' polupravu čije je teme N, paralelnu pravama a i b, a sa m pravu koja ne sadrži n' i paralelna je pravoj a. Prava m seče b jer je $n' \parallel b$. Ako je M presek pravih m i b, M' podnožje upravne iz M na pravoj a, L tačka prave b je takva da su $\mathrm{N}, \mathrm{L} \div \mathrm{MM}'$ i $\mathrm{ML} \cong \mathrm{MN}$, a L' podnožje upravne iz L na a, onda su trouglovi MNM' i MLM' podudarni jer su simetrični u odnosu na pravu MM', pa su trouglovi NK'M' i LL'M' podudarni. Na osnovu navedenog možemo zaključiti da $\mathrm{LL}' \cong \mathrm{NK}' \cong l$. Jedinstvenost tačke L sledi iz prethodne teoreme.

Teorema 12.: U hiperboličkoj ravni postoji jedinstvena prava upravna na jednom kraku, a paralelna sa drugim krakom oštrog ugla.



Skica 5. – Prava upravna na jednom kraku, a paralelna sa drugim

Dokaz: Ako je svaka prava upravna na jednom kraku oštrog ugla Opq sekla drugi krak, onda bi, na osnovu Leandrove teoreme, u hiperboličkoj ravni postojao trougao kome je zbir unutrašnjih uglova π, što je nemoguće. Stoga tačke poliprave p možemo da podelimo u dva skupa $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$, takva da za svaku tačku M skupa $\mathcal{M}$ prava m koja je u tački M upravna na p, seče q, a za svaku tačku N skupa $\mathcal{N}$ prava n koja je u tački N upravna na p, nema zajedničkih tačaka sa polupravom q(skica 5.). Primetimo da su skupovi $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$ neprazni i da svaka tačka poluprave p pripada jednom od njih. Budući da se jednostavno dokazuje da između tačaka jednog od tih skupova nema tačaka drugog, pa postoji jedinstvena tačka S koja razdvaja skupove $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$. Ta tačka pripada skupu $\mathcal{N}$ jer bi, u suprotnom, prava s koja je u tački S upravna na p sekla q u nekoj tački R pa, ako bi T bila tačka takva da je $\mathcal{B}$(O,R,T), prava t koja sadri T i upravna je na p, sekla bi polupravu p u tački T' takvoj da je $\mathcal{B}$(O,S,T'). Odatle bi sledilo da tačka S ne razdvaja skupove $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$.

Dakle, prava s je upravna na p i nema zajedničkih tačaka sa polupravom q. Obeležimo sa s' onu od polupravih na koje S razlaže pravu s, koja je sa one strane prave OS sa koje je poluprava q, i dokažimo da je $q \parallel s'$. Neka je L proizvoljna tačka u konveksnom uglu čiji su kraci poluprave (SO) i s'. Ako je L van oštrog ugla pq neposredno se dokazuje da poluprava (SL) seče q. Stoga pretpostavimo da L pripada uglu $\measuredangle pq$ i sa P obeležimo podnožje upravne i L na p. Kako je OSL oštar ugao, tačka P pripada duži OS, pa zato prava PL seče q u nekoj tački Q. Prava SL pripada ravni trougla OPQ, seče njegovu ivicu PQ, a ne seče ivicu OP

pa, na osnovu Pašove aksiome, seče ivicu OQ. Dakle, poluprava (SL) seče q, pa je $q \parallel s'$.

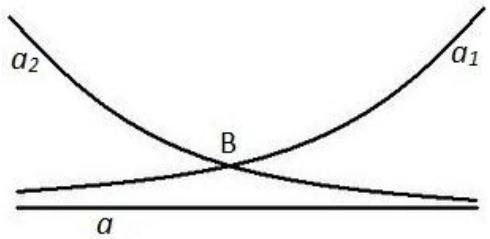
Važno je navesti i postojanje sledećih teorema:

Teorema 13.: Ako se prave a i b seku, upravna projekcija jedne na drugu je tačka ili otvorena duž.

Teorema 14.: Ako su prave a i b međusobno paralelne, upravna projekcija jedne na drugu je otvorena poluprava.

Hiperparalelnost pravih

U hiperboličkoj ravni poluprave p' i q' koje sadrže proizvoljnu tačku A i paralelne su nekoj pravoj a kojoj ne pripada tačka A, nisu komplementne, pa prava a pripada konveksnom uglu $p'q'$. Na osnovu ovoga sagledavamo da prave p i q koje sadrže poluprave p' i q' razlažu ravan kojoj pripadaju na dva para unakrsnih uglova. Sve prave koje sadrže tačku A i pripadaju onom paru unakrsnih uglova kojem pripada i prava a seku tu pravu. One prave koje ne pripadaju tom paru unakrsnih uglova, sa pravom a nemaju zajedničkih tačaka.



Skica 6. – paralelne i hiperparalelne prave

S obzirom da takvih pravih ima neograničeno mnogo važi sledeća teorema:

Teorema 15. : U hiperboličkoj ravni postoji neograničeno mnogo pravih koje sadrže proizvoljnu tačku A, a sa nekom pravom a kojoj ne pripada tačka A nemaju zajedničkih tačaka.

Za sve prave hiperboličke ravni koje sadrže tačku A, ne seku pravu a i nisu paralelne toj pravoj reći ćemo da su hiperparalelne prave pravoj a. Za svaku polupravu koja pripada hiperparelnoj pravoj kažemo da je hiperparalelna pravoj a.

Za relacije hiperparalelnosti pravih važe osobine transmisibilnosti i simetričnosti pa samim tim važe i sledeća tvrđenja.

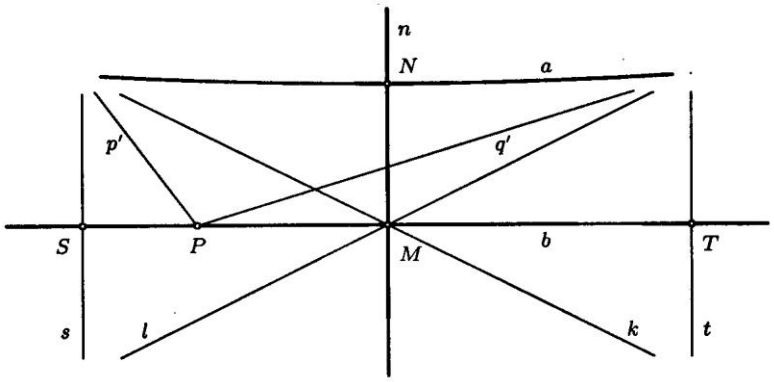
Teorema 16. : Ako poluprava m' sadrži polupravu n' tada je jedna od tih dveju polupravih hiperparalelna pravoj a ako i samo ako joj je hiperparalelna i druga.

Teorema 17. : Ako je prava c hiperparalelna pravoj b onda je i prava b hiperparalelna pravoj c.

Hiperparalelnost pravih nije tranzitivna jer dve prave koje sadrže neku tačku B i hiperparalelne su sa pravom a nisu međusobno hiperparalelne.

Dve prave upravne na trećoj su međusobno hiperparalelne, dokazano je da važi i obrnuto.

Teorema 18. : Postoji jedinstvena prava upravna na dvema međusobno hiperparalelnim pravama.



Skica 7. –Prava upravna na dvema međusobno hiperparalelnim pravama

Dokaz: Neka su a i b dve međusobno hiperparalelne prave, P proizvoljna tačka prave b, a p' i q' poluprave sa zajedničkim temenom P paralelne pravoj a (skica 7.). Na osnovu Teoreme 12. postoje jedinstvene prave s i t , u tačkama S i T upravne na pravoj b, koje su paralelne pravama p' i q'. Neka je M središte duži ST, n prava koja sadrži M i upravna je u tački N na pravoj a, a k i l prave koje sadrže M, takve da je k paralelna pravama a i s, a l pravala a i t. Centralnom simetrijom $\mathcal{S}_M$ svaka od pravih k i l se preslikava na sebe, a prave s i t jedna na drugu. Stoga su prave k i l paralelne i pravoj s i pravoj t, pa je prava b osa refleksije kojom se prave k i l preslikavaju jedna na drugu. Kako se i osnom refleksijom $\mathcal{S}_n$ prave k i l preslikavaju jedna na drugu jel su obe paralelne pravoj a, prave b i n će biti međusobno upravne.

Ako bi pored prave n još neka prava m bila upravna i na pravoj a, i na pravoj b onda bi te dve prave bile disjunktne jer bi, u protivnom, iz njihove presečne tačke postojale dve upravne na pravoj a. Tada bi svaki od uglova četvorougla čije ivice pripadaju pravama a, m, b, n bio prav, što je nemoguće.

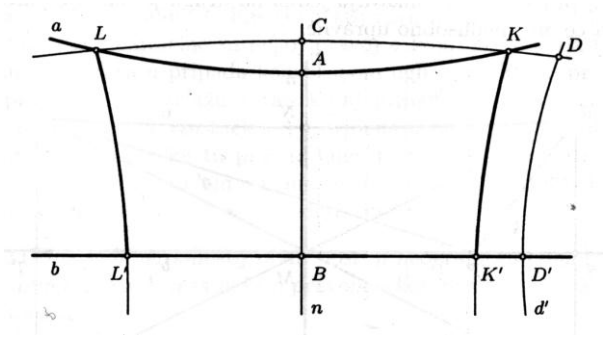
Iz ove teoreme sledi sledeća teorema:

Teorema 19. : Ako su prave a i b hiperparalelne, upravna projekcija jedne na drugu je otvorena duž.

Važno je u ovom radu navesti još dve teoreme o hiperparalelnosti.

Teorema 20. : Ako je n prava u tačkama M i N upravna na dvema različitim pravama a i b, K i B tačke prave a takve da je $\mathcal{B}(\mathrm{M}, \mathrm{K}, \mathrm{B})$, a K' i B' podnožja upravnih iz tih dveju tačaka na pravoj b, onda je $\mathrm{KK}' < BB'$.

Teorema 21. : Ako je prava n u tačkama A i B upravna na dvema različitim pravama a i b, a l proizvoljna duž veća od duži AB, onda na pravoj a postoje tačno dve tačke K i L kojima su podnožja upravnih na pravoj b, K' i L' takve da je $\mathrm{KK}' \cong \mathrm{LL}' \cong l$.



Skica 8. –Rastojanje izmedju prava a i b

Dokaz: Neka je C tačka poluprave (BA) takva da je $\cong\ l$, neka je d' poluprava upravna na b, a paralelna pravoj a, kojoj je teme D' na pravoj b, i neka je D tačka poluprave d' takva da je $DD' \cong l$. Tačke C i D pripadaju ekvidistanti $\mathcal{E}$ definisanoj u odnosu na pramen pravih upravnih na b, i nalaze se sa raznih strana prave a pa, pa odatle sledi da postoji tačka K koja pripada i pravoj a i ekvidistanti $\mathcal{E}$. Stoga je $KK' \cong l$. U refleksiji S_n prava a i ekvidistanta $\mathcal{E}$ su invarijantne, pa je $S_n(K) = L$ i $LL' \cong l$. Ako tačke K I L ne bi bile jedinstvene, prava a i ekvidistanta $\mathcal{E}$ bi imale vise od dve zajedničke tačke.

Prave i ravni u hiperboličkom prostoru

Ako prava p sa ravni π nema zajedničkih tačaka, tada je ona paralelna pravoj p' koja sadrži njenu upravnu projekciju na π, ili je sa tom pravom hiperparalelna. U prvom slučaju prava p i ravan π su paralelne, a u drugom međusobno hiperparalelne.

Upravna projekcija prave p koja je paralelna ravni π, na toj ravni predstavlja otvorenu polupravu, a ukoliko je prava p hiperparalelna ravni π tada je njena projekcija na π otvorena duž. Ako prava p ne pripada ravni π već je seče njena projekcija na π biće tačka ako je prava p upravna na ravan π, a otvorena duž ako nije.

Za navedene slučajeve važe sledeće teoreme:

Teorema 22. : Ako je prava p hiperparalelna ravni π, p' prava koja sadrži njenu upravnu projekciju na ravan π, a α ravan koja sadrži pravu p i seče ravan π duž neke prave q, tada su prave p i p' hiperparalelne pravoj q.

Teorema 23. : Ako je prava p van ravni π, a hiperparalelna bilo kojoj pravoj q te ravni, tada je prava p hiperparalelna ravni π.

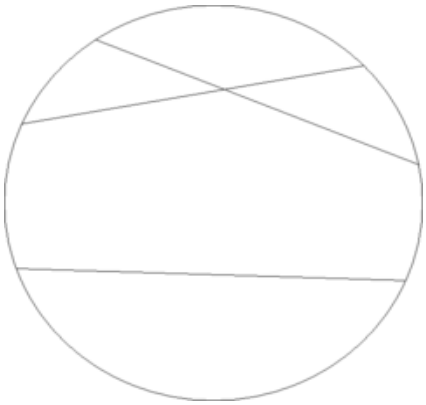
Ravan γ upravna je na ravni α i β i seče ih duž dveju pravih a i b. Ukoliko su a i b međusobno hiperparalelne onda su i ravni α i β međusobno hiperparalelne.

Modeli hiberboličke ravni

Postoji nekoliko modela koji se koriste za objašnjavanje hiperboličke geometrije: Klajnov model, Poenkareov disk model, Poenkareov poluravanski disk model i Lorencov model. Ovi modeli definišu realan hiperbolički prostor koji zadovoljava aksiome hiperboličke geometrije. Uprkos imenima koji su dobili, poluravanske modele je smislio Beltrami, a ne Poenkare ili Klajn.

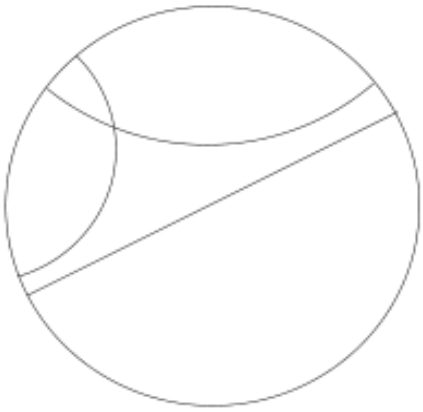
Klajnov model, takođe nazvan projektivni model, je model n-dimenzionalne hiperboličke geometrije u kojem su neeuklidske tačke raspoređene na jednom n-dimenzionalnom disku, ili bolje rečeno lopti, a neeuklidske prave su delovi pravih linija sadržanih na ovom "disku", što znači da se krajevi ovih pravih završavaju na ivici diska. Kada se predstavi u jednoj ravni,

Klajnov model postaje donekle jednostavniji i očigledniji, jer tada n-dimenzionalni disk, kao neeuklidska površ iz ovog modela, postaje u stvari površina kruga u jednoj ravni. Neeuklidske tačke su tada sve tačke kruga osim onih koje se nalaze na kružnici koja ga ograničava kao granica neeuklidske ravni, a neeuklidske prave su prave linije nacrtane na ovom krugu. Dakle, o modelu postaje očigledan peti postulat neeuklidske geometrije Lobačevskog. U koliko se presek dve prave nalazi na kružnici tada su te dve prave paralelne. Prave koje se seku izvan kružnice biće hiperparalelne.



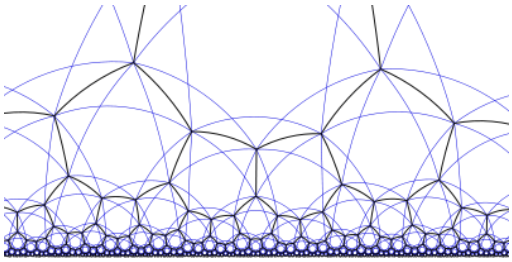
Skica 9. –Klajnov model

Poenkareov disk model predstvlja sledeći model hiperboličke geometrije. On je n-dimenzionalni model hiperboličke geometrije u kojem su neeuklidske tačke raspoređene po jednom n-dimenzionalnom disku ili lopti, a neeuklidske prave su delovi kružnica nacrtanih na ovom disku koje su ortogonalne na ivicu diska. Možemo reći da su ovi delovi kružnica prečnici diska. Kada se predstavi u dve dimenzije Poenkareov disk model donekle je jednostavniji, jer tada n-dimenzionalni disk, kao neeuklidska površ, postaje u stvari krug u jednoj ravni, a kružnica koja ga ograničava je ivica ili granica ove neeuklidske površi. Neeuklidske tačke su sve tačke kruga, osim onih na graničnoj kružnici, a neeuklidske prave su delovi kružnica nacrtanih na krugu koje seku graničnu kružnicu pod pravim uglom. Slično kao i u prethodnom modelu, delovi kružnica koji se seku na granicnoj kružnici predstavljaju paralelne prave. Kružnice koje se ne seku pretstavljaju hiperparalelne prave.



Skica 10. –Poenkareov disk model

Sledeci model Hiperbolicke geometrije je Poenkareov poluravanski model. To je model u kojem su neeuklidske tačke raspoređene po jednoj Euklidskoj poluravni. Euklidsku poluravan pretstavlja hiperbolicku ravan koja je odredjena Euklidskom pravom l koja joj ne pripada. Hiperboličke prave su polukružnice normalne na pravu l ili Euklidske poluprave normalne na l. Paralelne prave su hiperbolicke prave koje je seku na pravoj l, dok su hiperparalelne prave sve one koje se ne seku u zadatoj poluravni.



Skica 11. –Poenkareov poluravanski model

ZAKLJUČAK

Istraživanja o hiperboličkoj geometriji predstavljaju deo veoma bitnog teoretskog i praktičnog znanja u geometriji i matematici uopšte. Prelaskom na istraživanja prevelikih prostornih dimenzija, kada se sa preterano malih zemaljskih dimenzija mikrosveta prešlo na prevelike dimenzije makrosveta, došlo je do neophodnosti izučavanja i razvoja u oblasti hiperboličke geometrije. Znanja do kojih se istraživanjem u ovoj geometriji došlo primenjuju se i

u istraživanjima u fizici i astronomiji. S obzirom na veličinu prostora i na velike mogućnosti prostornih odnosa elemenata u njemu, hiperbolička geometrija se bazira na istraživanju prostorne beskonačnosti. Hiperbolička geometrija našla je svoju veliku primenu pri sabiranju brzina svetlosti. Ajnštajnova Opšta teorija relativnosti opisuje prostor kao generalno ravan, ali i eliptički zakrivljen cu oblastima u blizini kojih je prisutna materija. S obzirom da se vasiona širi, čak i prostor gde ne postoji materija ili masa može se opisivati uz pomoć hiperboličkog modela koji se bazira na istraživanju prostorne beskonačnosti.

Ovom istraživanju nema granica, a mogućnosti geometrije i matematike kao prirodne nauke predstavljaju beskonačno bogatstvo i neistraženu oblast u kojoj ne postoje ograničenja.

LITERATURA

1. Zoran Lučić, Euklidska i hiperbolička geometrija, Total design i Matematički fakultet, Beograd, 1997.
2. James W. Anderson, Hyperbolic Geometry, Springer, 1999.
3. www.alas.matf.bg.ac.rs