# ПЛАТОНОВА ТЕЛА

# PLATONIC SOLID

Ученик: **МИНА ШЕКУЛАРАЦ**
VII разред
ОШ "Карађорђе", Београд

Ментор: **ВИОЛЕТА КОМНЕНОВИЋ**, професор математике
Електротехничка школа "Никола Тесла", Београд

Регионални центар за таленте – Београд II

Београд, април 2012.

## РЕЗИМЕ

Кристали су својим правилним обликом одувек привлачили пажњу људи. У природи постоје материје које кристалишу у облику тетраедра, октаедра, хексаедра (коцке), додекаедра или икосаедра, па су ови облици сигурно били познати људима и у далекој прошлости. Због своје постојаности у неживом свету, ова правилна тела, као појава настала у природи, веома често била су предмет истраживања.

Оно што ме је подстакло на истраживање у овој области је то што се до овог сазнања дошло веома давно, али његово понављање кроз векове, и епохе, изазивало је интересовање научника разних области: хемичара, математичара, геолога, кристалографа, али и астролога. Ова истраживања јављала су се на разним меридијанима, у многим културама и кроз временске епохе полазећи од најједноставнијих облика тела па до фантастичних просторних структура, пратећи одређени след и долазећи до истих логичких образаца и истих резултата. Један од разлога одабира ове теме је и његова универзалност у времену и простору.

Идеја о овом истраживању потекла је из жеље да још једном укажем на карактеристике Платонових тела, њихову јединственост, универзалност и присутност свуда око нас почев од најситнијих честица кристала, па до савршеног Универзума.

Данас смо сведоци савремених научних и технолошких истраживања која још једанпут потврђују да се иза свих изузетних и наизглед савршених ствари у природи која нас окружује све одвија по одређеним правилима, у одређеном ритму и по одређеним геометријским, математичким, принципима.



**Кључне речи**: Платонова тела, Ојлерова теорема, правилан многоугао, правилни полиедри, геометријска тела.



## SUMMARY

Crystals with their regular form have always attracted people's attention. In nature there are substances which crystallize in the form of a tetrahedron, octahedron, hexahedron (cube), dodecahedron or icosahedron, so these forms must have been known to people in the distant past. Because of their persistence in the inanimate world, these regular forms, as a phenomenon created in nature; have often been the subject of research.

What stimulated me to research in this area is that this knowledge was acquired very long time ago, but its repetition through the centuries and epochs, aroused the interest of scientists from different areas: chemists, mathematicians, geologists, crystallographers, and astrologers.

These studies have appeared in various meridians, in many cultures through time periods starting from the simplest forms of the body to the fantastic spatial structures, following a certain sequence and reaching the same logical patterns and the same results. One of the reasons for selecting this topic is its universality in time and space.

The idea of this research came from the wish to once again point out the characteristics of the Platonic bodies, their simplicity, universality and presence all around us, from the tiniest particles of crystals, to perfect Universe.

Today we witness a modern scientific and technological research that once again confirms that behind all the exceptional and apparently perfect things in nature which is around us everything goes according to definite rules, in a definite rhythm and by definite geometric, mathematical, principles.

**Keywords:** Platonic bodies, Euler's theorem, regular polygon, regular polyhedron, geometric forms.

## УВОД

Подручје истраживања у овом раду представљају Платонова тела која су позната од старих Грка па до данас.

Платонова тела представљају правилне полиедре, састављене од једне врсте правилних многоуглова. Правилан многоугао је многоугоугао чије су све странице једнаких дужина, а сви унутрашњи углови међусобно подударни.

Платонових тела има пет и то су:

1. тетраедар,
2. октаедар,
3. икосаедар,
4. хексаедар,
5. додекаедар.

Предмет истраживања овог рада је:

- анализа и испитивање Платонових тела,
- истраживање Платонових тела кроз историју,
- истраживање Ојлерове теореме и њена примена,
- истраживање дуалности Платонових тела,
- истраживање постојања Платонових тела у природи,

- примена Платонових тела у савременој архитектури и модерним играма на срећу.

Циљ истраживања у овом раду је:

- теоријска анализа у смислу примене сазнања о Платоновим телима у природи и савременом свету,
- сагледавање и утврђивање примене Платонових тела као основних геометријских облика у природи,
- истраживање Ојлерове теореме и утврђивање постројања само пет правилних полиедара – Платонових тела,
- афирмација Платонових тела као познатих геометријских форми које постоје у природи и у Универзуму од њиховог настанка, а који се и данас примењују у многим дисциплинама и изнова потврђују своју актуелност.

За истраживање у оквиру рада о Платоновим телима користиће се следеће методе истраживања:

- анализа података из прикупљене литературе о овој проблематици,
- анализа претходних истраживања у овој области уз обраду података добијених претходним анализама и систематизацијом података,
- метод закључивања из претходних чињеница о општем сазнању.

Резултати истраживања о Платоновим телима и њиховој примени у свакодневном животу приказани ће бити кроз сумирање и интерпретацију претходних сазнања и нових закључака до којих се овим истраживањем дошло.

## РЕЗУЛТАТИ ИСТРАЖИВАЊА И ДИСКУСИЈА

### *Дефиниције појмова*

Полиедар је унија полиедарске површи и дела простора ограниченог том површи.

Полиедарска површ је затворена површ састављена од коначног броја многоуглова, при чему ти многоуглови задовољавају следеће услове:

- свака страница сваког од многоуглова заједничка је за тачно два многоугла,
- свака ивица спаја два темена,
- не постоје два многоугла са заједничким унутрашњим тачкама,
- свака два многоугла могу се повезати низом многоуглова тако да сваки од њих има заједничку страницу са следећим,

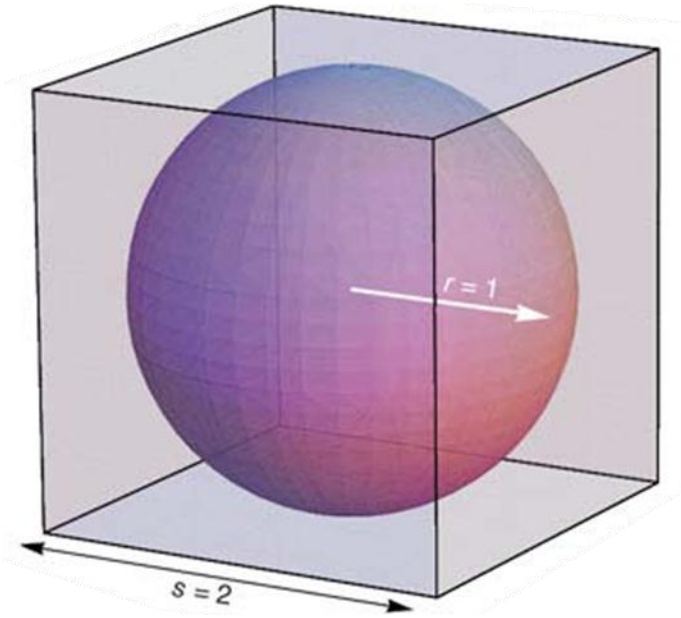
– свако теме сваког многоугла врх је тачно једног рогља.

Полиедарска површ дели простор на два дела – ограничен и неограничен.

Многоуглови који граде тело (полиедар) називају се стране (пљосне), а њихове стране су ивице, а њихова темена су темена полиедра.

Полиедар је правилан ако се састоји од једне врсте правилног многоугла. Многоугао је правилан ако су му све странице једнаке, и ако су му сви унутрашњи углови исти.

Око правилног полиедра може се описати и уписати лопта. Описана лопта око полиедра садржи сва темена тог полиедра, а уписана лопта у правилни полиедар додирује све његове странице у по једној тачки (Слика 1. ).



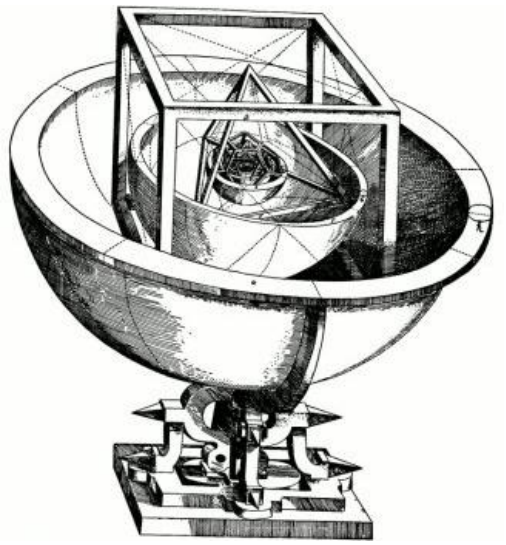

*Слика 1. Уписана лопта у хексаедру (коцки)*

***Платонова тела кроз историју***

Човек је још од прастарих времена, када је размишљао о слици Универзума, увелико користио идеју симетрије. Стари Грци су симетрију повезивали са Универзумом из једноставног разлога - сматрали су је лепом. Полазећи од идеје симетрије они су извели неколико претпоставки. Питагора (V век п.н.е) који је сматрао сферу најсиметричнијим и најсавршенијим обликом, закључио је да Земља има управо облик сфере. Он је, такође, претпостављао да се Земља окреће око неке “централне ватре”, заједно са шест планета познатих у то време.

Идеја симетрије садржана у пет Платонових тела дотакла је и чувеног немачког астронома Јоханеса Кеплера (1571-1630), који се трудио да објасни зашто постоји само шест планета у Соларном систему (у Кеплерово време знало се за само шест планета) и

зашто се полупречници њихових сфера (орбита) према његовим резултатима јављају у односу 8:15:20:30:115:195 (Слика 2.). Кеплер је унутар Сатурнове сфере уписао коцку. Унутар те коцке уписао је Јупитерову сферу, а онутар ове, тетраедар. Унутар тетраедра уписао је Марсову сферу и у сфери додекаедар. У додекаедар уписао је Земљину сферу, а унутар ње уписао је икосаедар. У икосаедар уписао је Венерину сферу да би најзад у њу уписао и Меркурову сферу.



*Слика 2. Кеплеров приказ шест планета у Соларном систему*

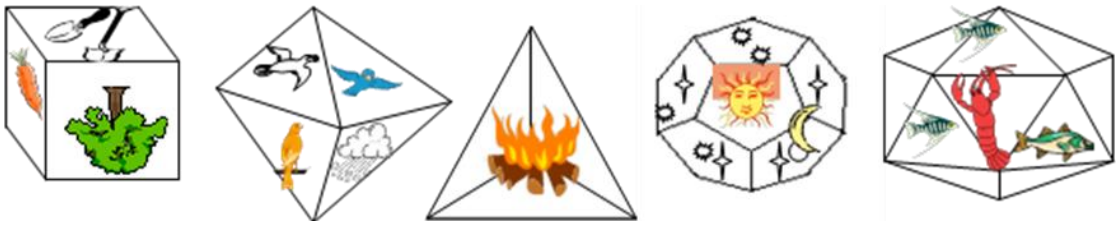
Платонова тела су једноставни примери који нам показују како симетрија може драстично да ограничи бескрајне структуре могуће у природи.

Народи старог века волели су симетрију и осим сфера они су употребљавали правилне полиедре. Тако су они установили запањујућу чињеницу да постоји само пет конвексних полиедара.

За геометријска истраживања значајно је разматрање сваког од полиедара појединачно, али је још значајније увођење појма правилног полиедра и проучавање њихових заједничких особина и међусобних веза. Прокло ( 410. – 485. ) је конструкцију пет правилних полиедара: тетраедра, октаедра, икосаедра, хексаедра и додекаедра приписао Питагори. Прва учења Питагорејаца о пет правилних полиедара касније је опширније описао Платон, тако да су они у математици познати као Платонова тела. Данас се сматра да је појам правилног полиедра у геометрију увео Теетет ( око 414. до 369. пре нове ере ) ученик Платонове академије.

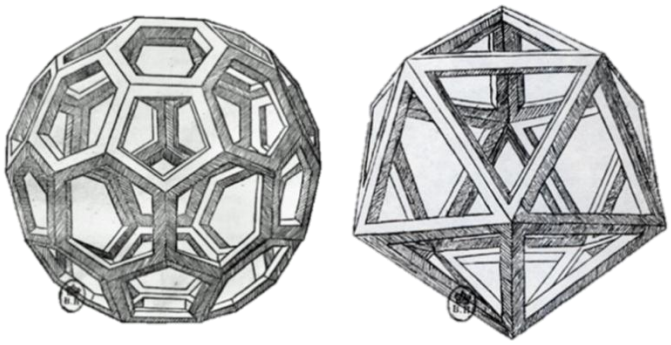
Правилни полиедри познати су и под називом Платонова тела иако уствари нису Платоново откриће. Ови правилни полиедри названи су Платоновим због њихове употребе која је приказана у раду "Тимеј" где су појединачним појавама четири елемента додељени

облици прва четири геометријска тела. Платон (429. до 348. пре нове ере ) и стари Грци су Платоновим телима приписивали мистична својства. Ову идеју заступао је и Јохан Кеплер. За њега је хексаедар (коцка) својом стабилношћу симболизовао земљу, а октаедар који се придржава за наспрамна темена је својим ротирањем симболизовао покретљивост ваздуха. Тетраедар и икосаедар (правилни полиедри са најмањим и највећим бројем страна) симболизовали су сувоћу ватре и влажност воде, а додекаедар са својих дванаест (број хороскопских знакова у астрологији) страна симболизовао је универзум – васиону (Слика 3.). Кеплер је покушао да односе растојања тада познатих планета ( Меркур, Венера, Земља, Марс, Јупитер и Сатурн ) представи међусобним односима правилних полиедара.



*Слика 3. Магична својства Платонових тела*

Леонардо да Винчи се такође у својим истраживањима бавио изучавањем правилних додекаедара и икосаедара о чему сведоче и његови цртежи из 1509. године (Слика 4.).



*Слика 4. Цртежи додекаедра и икосаедра Леонарда да Венчија*

### *Листа симбола*

Симболи коришћени у овом раду су следећи:

$n$ – број страница (ивица) на једној страни тела (а тиме и број углова једне стране тела),

$r$ – број страна које полазе из једног врха тела,

$s$ – број страна тела,

$i$ – број ивица тела,

$t$ – број врхова (темена) тела,

$P$ – површина,

$S$ – збир унутрашњих углова једне стране тела,

$V$ – запермина тела,

$B$ – површина основе,

$h$ – висина тела.

### *Ојлерова теорема*

Ојлерова теорема код конвексних полиедара гласи: $t + s = i + 2$

Доказ:

$$\sum S = (n_1 - 2) \cdot 180° + (n_2 - 2) \cdot 180° + \cdots + (n_S - 2) \cdot 180°$$
$$= (n_1 + n_2 + \cdots + n_S) \cdot 180° - 2s \cdot 180° = 2i \cdot 180° - 2s \cdot 180°$$
$$= i \cdot 360° - s \cdot 360° = (i - s) \cdot 360°$$

$n_1 + n_2 + \cdots + n_S = 2i$ из услова полинома да је свака страница сваког од многоуглова заједничка за тачно два многоугла.

Ако полиедар пројектујемо на раван тако да се ниједна два темена полиедра не пројектују у исту тачку, и ниједна страна у дуж тада у оваквој пројекцији свака страна се пројектује у многоугао са једнаким бројем темена. Тиме је збир углова сваке стране тела и збир углова многоугла једнак. Из тога сазнајемо да је збир свих ивичних углова полиедра једнак збиру унутрашњих углова пројекција свих страна полиедра. Пројекција полиедра је многоугаона површ, која је страна полиедра. Та површ је двоструко покривена површима полиедра приликом пројектовања, и због тога приликом сабирања углова на пројекцији углове при теменима површи треба два пута сабирати. Ако многоугаона површ има *n* темена, тада полиедар има *t-n* темена којима су пројекције унутрашње тачке површи па је:

$$\sum S = 2(n - 2) \cdot 180° + (t - n) \cdot 360° = (n - 2) \cdot 360° + (t - n) \cdot 360°$$
$$= \big((n - 2) + (t - n)\big) \cdot 360° = (n - 2 + t - n) \cdot 360° = (-2 + t) \cdot 360°$$
$$= (t - 2) \cdot 360°$$

Из првог и другог збира углова добијамо:

$(t - 2) \cdot 360° = (i - s) \cdot 360°$

Ако оба дела једнакости поделимо са $360°$ онда добијамо следећу једнакост:

$t - 2 = i - s$

$t + s = i + 2$

### *Доказ постојања пет правилних полиедара*

Конвексан полиедар је правилан ако се састоји од једне врсте једнакостраничних моноуглова, тако да је:

$ns = 2i$

$rt = 2i$

Ово сазнајемо из услова полиедара да је свака страница сваког од многоуглова заједничка за тачно два многоугла  и да свака ивица спаја два темена.

Ако $s$ изразимо као:

$$s = \frac{2i}{n}$$

а $t$ као:

$$t = \frac{2i}{r} \ ,$$

и то заменимо у *Ојлерову теорему*:

$$t + s = i + 2$$

$$\frac{2i}{r} + \frac{2i}{n} = i + 2 \ ,$$

оба дела поделимо са $2i$ добијамо:

$$\frac{2i}{r} \div 2i + \frac{2i}{n} \div 2i = \frac{i}{2i} + \frac{2}{2i}$$

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{i} \ .$$

За $n \geq 4$ и $r \geq 4$ било би:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{i}$$

$$\frac{1}{2} \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{i}$$

што је немогуће. Многоугао мора да има бар три стране $(n \geq 3)$, и из једног темена излазе бар три стране полиедра ($r \geq 3$ ), тада постоји могућност $n = 3, r \geq 3$  и $r = 3, n \geq 3$.

Ако је $n = 3$, онда даје:

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{i}$$

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{i}$$

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{i}$$

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{6} = \frac{1}{i}$$

Одавде следи да $r \in \{3,4,5\}$ ($r \geq 6$ не може јер $\frac{1}{6} - \frac{1}{6} \leq 0$).

Ако је:

- $r = 3$ онда

  $\frac{1}{r} - \frac{1}{6} = \frac{1}{i}$

  $\frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{i}$

  $\frac{1}{6} = \frac{1}{i}$

  $i = 6$

  $s = \frac{2i}{n} = \frac{2 \cdot 6}{3} = 4$

  то је тетраедар,

- $r = 4$ онда

  $\frac{1}{r} - \frac{1}{6} = \frac{1}{i}$

  $\frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{i}$

  $\frac{1}{12} = \frac{1}{i}$

  $i = 12$

  $s = \frac{2i}{n} = \frac{2 \cdot 12}{3} = 8$

  то је октаедар,

- $r = 5$

  $\frac{1}{r} - \frac{1}{6} = \frac{1}{i}$

  $\frac{1}{5} - \frac{1}{6} = \frac{1}{i}$

  $\frac{1}{30} = \frac{1}{i}$

  $i = 30$

  $s = \frac{2i}{n} = \frac{2 \cdot 30}{3} = 20$

  то је икосаедар.

Ако је $r$ =3, онда је

$\frac{1}{r} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{i}$

$\frac{1}{3} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{i}$

$\frac{1}{3} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2} = \frac{1}{i}$

$\frac{1}{n} - \frac{1}{6} = \frac{1}{i}$

Одавде следи да $n \in \{3,4,5\}$ ($n \geq 6$ не може зато што је $\frac{1}{6} - \frac{1}{6} \leq 0$).

Ако је:

- $n = 3$

  $\frac{1}{n} - \frac{1}{6} = \frac{1}{i}$

  $\frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{i}$

  $\frac{1}{6} = \frac{1}{i}$

  $i = 6$

  $s = \frac{2i}{n} = \frac{2 \cdot 6}{3} = 4$

  то тетраедар,

- $n = 4$

  $\frac{1}{n} - \frac{1}{6} = \frac{1}{i}$

  $\frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{i}$

  $\frac{1}{12} = \frac{1}{i}$

  $i = 12$

  $s = \frac{2i}{n} = \frac{2 \cdot 12}{4} = 6$

  то хексаедар,

- $n = 5$

  $\frac{1}{n} - \frac{1}{6} = \frac{1}{i}$

  $\frac{1}{5} - \frac{1}{6} = \frac{1}{i}$

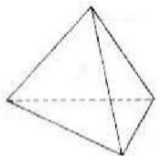
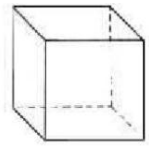
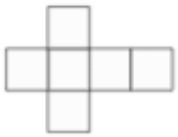
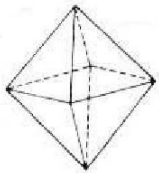
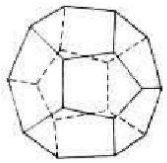
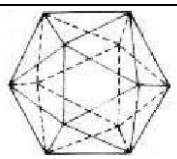
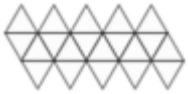
  $\frac{1}{30} = \frac{1}{i}$

  $i = 30$

  $s = \frac{2i}{n} = \frac{2 \cdot 30}{5} = 12$

  то додекаедар.

На овај начин доказали смо да постоји пет правилних полиедара, односно пет Платонових тела (Табела 1.).

| *Назив* | *Слика* | *Мрежа* | *Број темена* $t$ | *Број ивица* $i$ | *Број страна* $s$ |
|---|---|---|---|---|---|
| *Тетраедар* |  | | *4* | *6* | *4* |
| *Хексаедар* |  |  | *8* | *12* | *6* |
| *Октаедар* |  | | *6* | *12* | *8* |
| *Додекаедар* |  | | *20* | *30* | *12* |
| *Икосаедар* |  |  | *12* | *30* | *20* |

*Табела 1. Платонова тела: њихов изглед, мрежа, број темена, ивица и страна*

## ***Површина тела***

- Површина тетраедра

Тетраедар се састоји од четири једнакостранична троугла, а површина троугла је:

$P\text{троугла} = \frac{h \cdot a}{2}$ помоћу *Питагорине теореме* добијамо да је:

$$h^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{4a^2}{4} - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$$

$$h = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

тиме добијамо да је површина једнакостраничног троугла:

$$P\text{троугла} = \frac{h \cdot a}{2} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot a}{2} = \frac{\frac{a^2\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

тако да је површина тетраедра:

$$P\text{тетраедра} = 4 \cdot P\text{троугла} = 4 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = a^2\sqrt{3}$$

- Површина октаедра

Октаедар се састоји од осам једнакостраничних троуглова, како знамо да је

$$P\text{троугла} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

онда је површина октаедра:

$$P\text{октаедра } = 8 \cdot P\text{троугла} = 8 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 2 \cdot a^2\sqrt{3}$$

- Површина икосаедра

Икосаедар се састоји од двадесет једнакостраничних троуглова, како знамо да је

$$P\text{троугла} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

онда је површина икосаедра:

$$P\text{икосаедра} = 20 \cdot P\text{троугла} = 20 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 5 \cdot a^2\sqrt{3}$$

- Површина хексаедра

Хексаедар (тј. коцка) се састоји од шест правилних четвороуглова (тј.квадрата), а површина квадрата је

$$P\text{квадрата} = a \cdot a = a^2$$

тако да је површина хексаедра (тј. коцке):

$$P\text{хексаедра} = 6 \cdot P\text{квадрата} = 6a^2$$

- Површина додекаедра

$$P\text{додекаедра} = 3\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}a^2$$

***Запермина тела***

- Запермина призме је $V = B \cdot h$
- Запремина пирамиде је $V = \frac{B \cdot h}{3}$

- *Запремина тетраедра*

Тетраедар је пирамида

$$V = \frac{B \cdot h}{3}$$

чија је основа ($B$)

$$B = P\text{троугла} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

висина тетраедра се добија помоћу *Питагорине теореме* тиме што прво нађемо тежиште основе тетраедра, а код једнакостраничног троугла тежишна дуж је једнака висини, а то је $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ а тежиште се налази на $\frac{2}{3}$ тежишне дужи тако да се тежиште налази на $\frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ од темена троугла, али како знамо да је *Питагорина теорема* за тај правоугли троугао:

$$a^2 = h^2 + (\text{размак између темена и тежишта})^2$$

$$a^2 = h^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2$$

$$h^2 = a^2 - \frac{a^2 3}{9} = \frac{9a^2}{9} - \frac{3a^2}{9} = \frac{6a^2}{9}$$

$$h = \sqrt{\frac{6a^2}{9}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

на основу овога следи да је запремина једнака

$$V = \frac{B \cdot h}{3} = \frac{\frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3}}{3} = \frac{\frac{a^3\sqrt{18}}{12}}{3} = \frac{a^3 3\sqrt{2}}{36} = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3$$

- *Запремина октаедра*

Октаедар се састоји од две пирамиде

$$V = 2 \cdot \frac{B \cdot h}{3},$$

а основа ових пирамида је квадрат чије су стране стране троугла, тако да је

$$B = a^2$$

висина и једне и друге пирамиде се рачуна помоћу *Питагорине теореме*, тако што се тежиште налази на половини дијагонале основе ових пирамида:

$$d^2 = 2a^2$$
$$d = a\sqrt{2}$$
$$\frac{d}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

помоћу *Питагорине теореме* израчунаћемо висину, јер је она:

$$h^2 = a^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2 = a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = a^2 - \frac{2a^2}{4} = \frac{4a^2}{4} - \frac{2a^2}{4} = \frac{2a^2}{4}$$

$$h = \sqrt{\frac{2a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

па је запремина октаедра

$$V = 2 \cdot \frac{B \cdot h}{3} = 2 \cdot \frac{B \cdot h}{3} = 2 \cdot \frac{a^2 \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2}}{3} = 2 \cdot \frac{a^3 \cdot \sqrt{2}}{6} = \frac{\sqrt{2}}{3} a^3$$

- *Запремина хексаедра*

  Хексаедар је призма

  $$V = B \cdot h$$

  чије су све странице једнаке

  $$B = aa = a^2$$
  $$h = a$$

  па је запремина хексаедра:

  $$V = B \cdot h = a^2 a = a^3$$

- *Запремина икосаедра*

  $$V = \frac{5\left(3 + \sqrt{5}\right)}{12} a^3$$

- *Запремина додекаедра*

  $$V = \frac{15 + 7\sqrt{5}}{4} a^3$$

| *Naziv* | *P* | *V* |
|---|---|---|
| *Tetraedar* | $\sqrt{3}a^2$ | $\frac{\sqrt{2}}{12} a^3$ |
| *Heksaedar* | $6a^2$ | $a^3$ |
| *Oktaedar* | $2\sqrt{3}a^2$ | $\frac{\sqrt{2}}{3} a^3$ |
| *Dodekaedar* | $3\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}a^2$ | $\frac{15 + 7\sqrt{5}}{4} a^3$ |
| *Ikosaedar* | $5\sqrt{3}a^2$ | $\frac{5\left(3 + \sqrt{5}\right)}{12} a^3$ |

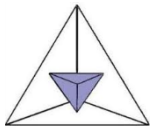
*Табела 2. Површина и запремина Платонових тела*

## ***Дуалност тела***

Сваки полиедар има свог пара из кога се може добити, једни из других спајањем средишта страна (пресека дијагонала квадрата, тежишта троугла и петоугла). Ти полиедри су међусобно дуални.

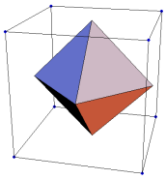
Дуалност правилних полиедара:

1. Тетраедар је сам себи дуалан (Слика 5.),

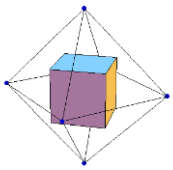


*Слика 5. Дуалност тетраедра*

2. Хексаедар и октаедар су међусобно дуални (Слика 6., Слика 7.) ,

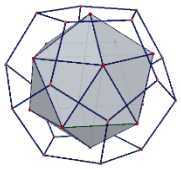


*Слика 6. Добијање хексаедра из октаедра*

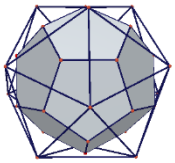


*Слика 7. Добијање октаедра из хексаедра*

3. Икосаедар и додекаедар су међусобно дуални (Слика 8., Слика 9.).



*Слика 8. Добијање додекаедра из икосаедра*



*Слика 9. Добијање икосаедра из додекаедра*

### ***Платонова тела у природи***

У природи се налазе елементи у облику Платонових тела. Правилан облик ових тела у природи представља на пример кристал кварца и соли (Слика 10., Слика 11.).

*Слика 10. Кристал кварца у облику тетраедра*

*Слика 11. Кристали соли у облику хексаедра*

У природи је могуће наћи и дијаманте у облику Платонових тела, а њиховим брушењем могуће је добити неко сложеније тело са већим бројем страница и тако настају брилијанти (Слика 12., Слика 13.).

*Слика 12. Дијамант у облику октаедра*

*Слика 13. Дијаманти у облику хексаедра*

***Примена Платонових тела у савременом животу***

Због свог једноставног али и савршеног облика примена Платонових тела у савременом свету је велика и то у дизајнираним индустријским предметима, архитектури, као и у свакодневном животу. Могућности уклапања и комбиновања Платонових тела приказане су у производима широке потрошње и то од амбалаже за паковање до предмета за свакодневну употребу.

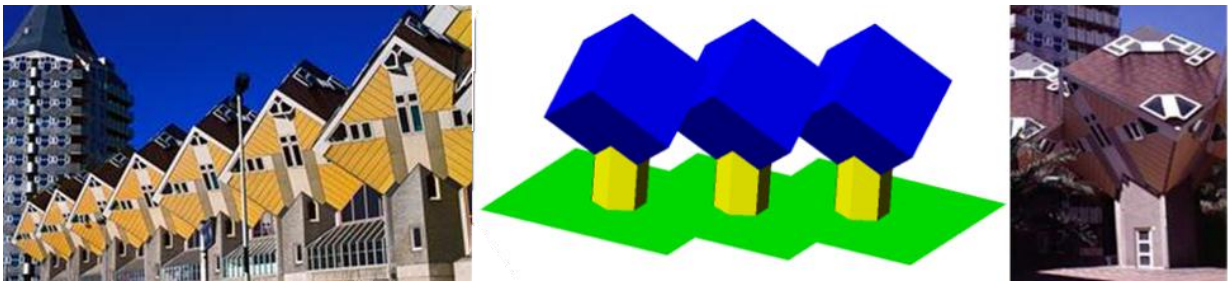
Примена Платонових тела могућа је чак и у изради предмета који се користе у друштвеним играма. Познату коцкицу – хексаедар могу да замене и друга Платонова тела (октаедар, тетраедар, икосаедар и додекаедар). На овај начин број могућих комбинација у овим играма већи је, што доприноси и динамици саме игре (Слика 14.).

*Слика 14. Примена Платонових тела у друштвеним играма*

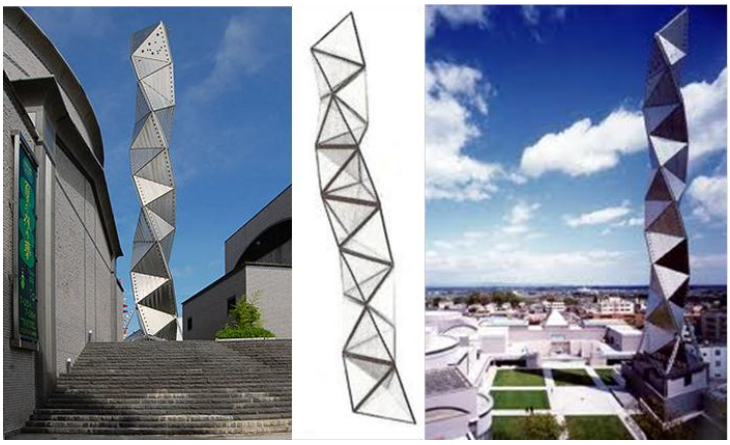
У савременој архитектури комбиновањем једноставних Платонових тела добијене су сложене архитектонске форме које су допринеле развоју градитељске мисли. Ове сложене конструкције, настале комбиновањем Платонових тела, представљају нека од

светских познатих архитектонских дела (Слика 15., Слика 16., Слика 17., Слика 18., Слика 19.).

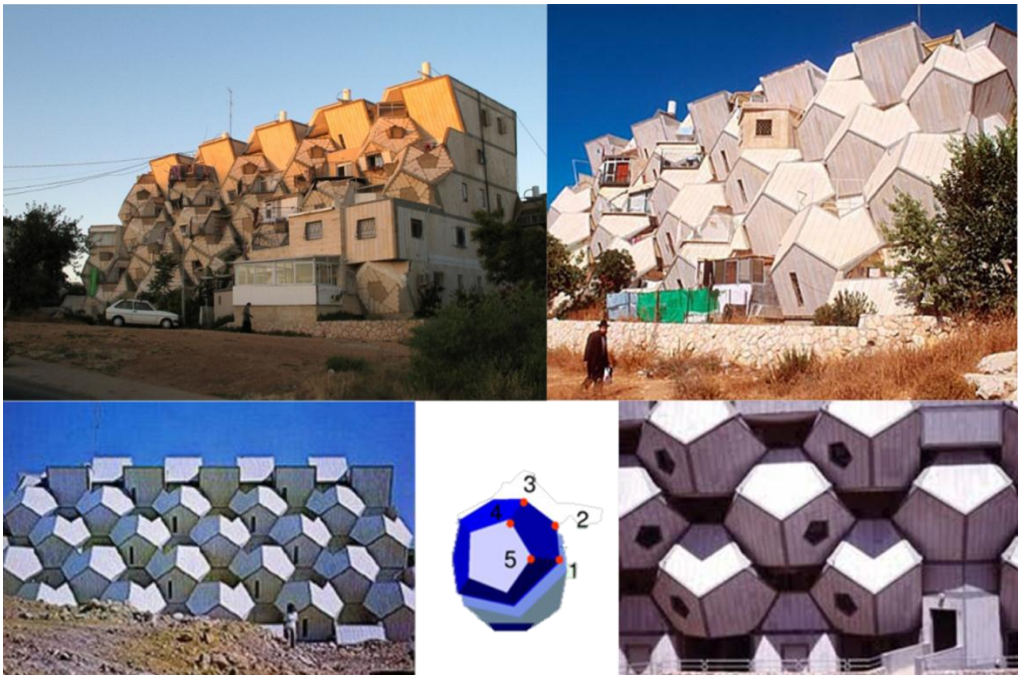
*Слика 15. Примена Платонових тела (хексаедра) у архитектури и грађевинарству - идејни пројекат вишеспратне зграде, New York, архитекта Santiago Calatrava*



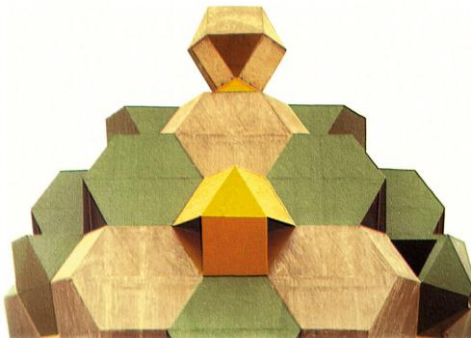
*Слика 16. Примена Платонових тела (хексаедра) у архитектури и грађевинарству – Стамбено насеље, Хелмонд, Холандија, 1984., архитекта Piet Blom*



*Слика 17. Примена Платонових тела (тетраедра) у архитектури и грађевинарству – Музеј савремене уметности, MOCA, Наги, Јапан, 1994., архитекта Arata Isozaki*




*Слика 18. Примена Платонових тела (додекаедра) у архитектури и грађевинарству – Стамбено насеље, Ramot Hausing, Јерусалим, Израел, 1971-1985., архитекта Zvi Hecker*



*Слика 19. Примена Платонових тела (додекаедра) у архитектури и грађевинарству – Mitzpe Ramon Synagogue, Mitzpe Ramon, Израел, 1968., архитекта Zvi Hecker*

## ЗАКЉУЧАК

Истраживања о Платоновим телима стара су вековима. Поред теоријског и практичног значаја у математици, Платонова тела срећу се у природи, у кристалографији, као и у истраживањима из области астрономије. Математика је наука у којој не постоје ограничења. Геометрија представља једну од основних области математике и њеном истраживању нема краја, као што нема краја ни могућностима комбиновања геометријских тела и формирања различитих просторних облика, па самим тим нема ни граница могућностима геометрије и математике. На основу геометрије Платонових тела научници су у прошлости покушали да растојања између планета (Меркура, Венере, Земље, Марса, Јупитера и Сатурна ) представе међусобним односима правилних полиедара.

Платонова тела сведоче о  јединству постојеће везе између математике и природе, као и нераскидиве везе између живог и неживог света и целог Универзума. Данас, Платонова тела присутна су свуда око нас, од најситнијег кристала соли, преко савремених архитектонских дела, све до Универзума.

## ЛИТЕРАТУРА


[1.] З. Лучић: Еуклидска и хиперболичка геометрија, Универзитет у Београду, Београд, 1997.

[2.] М. Радојчић: Елементарна геометрија, Научна књига, Београд, 1950.

[3.] С.Јешић (и др.): Математика за 7. разред основне школе, Герундијум, Београд, 2010.

[4.] С.Огњановић, Ж.Ивановић: Стереометрија Уџбеник са збирком задатака за II разред Математичке гимназије, Круг, Београд, 2009.

[5.] Ј.Кечкић: Математика са збирком задатака за III разред средње школе, Завод за уџбенике, Београд, 2008.

[6.] http://mathworld.wolfram.com (доступно јануара 2012.)

[7.] http://www.google.com/imghp?hl=en&tab=wi (доступно јануара 2012.)

[8.] http://www.google.rs/imghp?hl=sr&tab=wi (доступно јануара 2012.)