KRUG – VAŽNE PRAVE I TEOREME

CIRCLE – IMPORTANT LINES AND THEOREMS

Autor: PAVLE PETROVIĆ, VII-1, Osnovna škola ’’Mihailo Petrović Alas’’, Beograd
Mentor: VIOLETA KOMNENOVIĆ, profesor matematike, ETŠ ’’Nikola Tesla’’, Beograd

Regionalni centar za talente – Beograd II
Beograd, april 2012.

REZIME

U radu je obrađen pojam kruga (sa kružnicom) sa prikazom osnovnih definicija i pojmova. Opisuje se i odnos dva osnovna geometrijska pojma – tačke i prave – prema krugu i kružnici. Razmatrane su važne prave kruga, tangenta i sečica. Dat je osvrt na tangentnu duž kao element tangente i tetivu kao element sečice. Načinjen je izbor teorema koje razmatraju važne osobine tangente i sečice, uz dokaze koji su prilagođeni za osnovnu školu. U poglavlju “diskusija” date su smernice za dalji rad.

Ključne reči: krug, kružnica, prava, duž, teorema

SUMMARY

In this paper the term of the circle (with the circle line) is processed and some principal definitions and terms are presented. Also the relationship between the circle and the two main geometrical terms – the point and the line – is described. The important lines of the circle are considered, the tangent and the secant. The terms of tangential and secant segments is also introduced. Several theorems have been chosen that comprise the important properties of tangent and secant, and their proofs have been adopted for primary school level. In the “discussion” section direction is given for further research and studies.

Keywords: circle, circle line, straight line, line segment, theorem

UVOD

U Starom veku najvažniji pojmovi u geometriji bili su prava i krug. Prava i krug su imali najveći značaj zbog široke primene i jednostavne konstrukcije. Prava se konstruiše lenjirom, a krug šestarom.

U najvažnijem matematičkom delu Starog veka “Elementi” (13 knjiga), antički matematičar Euklid ističe važnost geometrije i već na početku prve knjige "Elemenata" uvodi definicije koje se odnose na krug i njegove osnovne elemente.

I danas, krug predstavlja jednu od najznačajnijih i najinteresantnijih geometrijskih figura. Predmet istraživanja ovog rada je krug i njegove bitne prave – sečica i tangenta. Cilj istraživanja je prikaz nekih osnovnih osobina sečica i tangenti u odnosu na krug. Kao metod istraživanja koriste se teoreme sa svojim osnovnim elementima (pojmovi i definicije, tvrđenje, dokaz).

Krug – osnovne definicije i pojmovi

Kružnica **k** je skup svih tačaka u ravni koje su podjednako udaljene od jedne fiksne tačke **O** te ravni.

Tačku **O** nazivamo središte ili centar kružnice.

Svaka duž koja spaja centar kružnice sa ma kojom tačkom kružnice naziva se **poluprečnik** ili **radijus** kružnice. Dužina poluprečnika kružnice obeležava se slovom **r**.

Za kružnicu kojoj je centar tačka O kažemo i da je opisana oko tačke O.

Kružnicu obično obeležavamo sa **k(O,r)**, a čita se: kružnica sa centrom u tački O i poluprečnikom r.

Kao zatvorena linija kružnica deli ravan u dve oblasti:

1) Unutrašnju oblast
2) Spoljašnju oblast

Kružnica i odgovarajuća unutrašnja oblast ravni određuju figuru koja se naziva **krug K**.

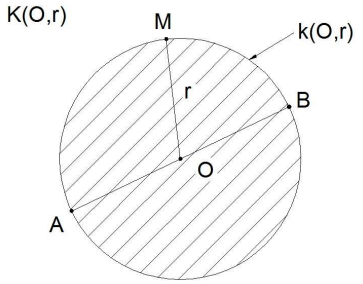
Centar i poluprečnik kružne linije su centar i poluprečnik odgovarajućeg kruga.

Krug se obeležava sa **K(O,r)**.

Bitno je napomenuti da se kružnica obeležava malim slovom k, a krug velikim slovom K.

Duž koja spaja dve tačke kružnice i pri tome sadrži centar kruga O naziva se **prečnik** ili **dijametar D** kruga.

Na slici 1. prikazan je krug sa osnovnim elementima. Šrafirani deo predstavlja unutrašnju oblast.



Tačka **O** je centar kružnice

Duž **OM** je poluprečnik kružnice

r je dužina poluprečnika kružnice

Duž **AB** je prečnik kružnice

Slika 1. Krug sa osnovnim elementima

Položaj tačke prema krugu

Neka je dat krug K(O,r) i tačka M u ravni kruga.

Rastojanje tačke M od središta O kruga K(O,r) naziva se **centralno rastojanje** te tačke.

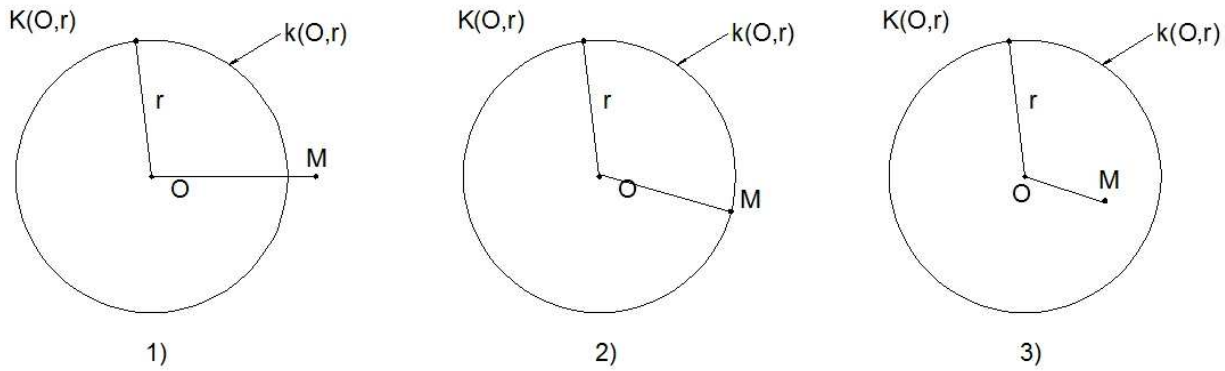
Ako centralno rastojanje te tačke označimo sa OM, o međusobnom položaju date tačke i datog kruga možemo reći sledeće:

1) Ako je OM > r, tačka M je van kruga

2) Ako je OM = r, tačka M pripada krugu (kružnici)

3) Ako je OM < r, tačka M je u krugu

Na sledećoj slici su prikazana sva tri slučaja.



Slika 2. Položaj tačke prema krugu

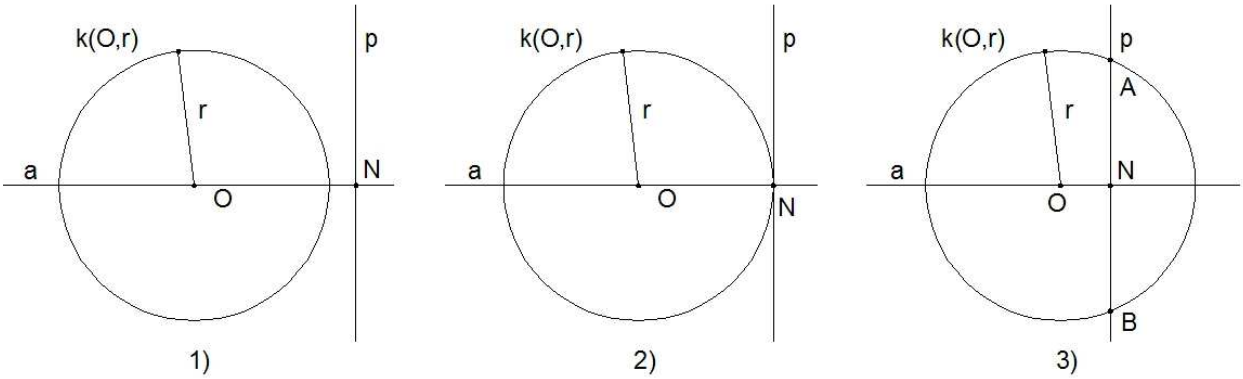
VAŽNE PRAVE KRUGA

Prvo ćemo razmotriti kakav može biti položaj prave prema krugu, odnosno kružnici.
Neka je data kružnica k(O,r) i prava p u njenoj ravni. Neka je u istoj ravni prava a, koja prolazi kroz centar O i normalna je na datu pravu p. Presek ovih dveju pravih obeležimo tačkom N.
Duž ON koja pripada pravoj a zove se **centralno rastojanje** prave p u odnosu na datu kružnicu.
Tačka N predstavlja **podnožje centralnog rastojanja** prave.

U zavisnosti od centralnog rastojanja ON prave p u odnosu na datu kružnicu k, imamo sledeće mogućnosti:

1) ON > r, prava p nema ni jednu zajedničku tačku sa kružnicom
2) ON = r, prava p ima samo jednu zajedničku tačku sa kružnicom (tačka N)
3) ON < r, prava p ima dve zajedničke tačke sa kružnicom (tačke A i B)

Naredna slika ilustruje ove mogućnosti.



Slika 3. Položaj prave prema kružnici

Tangenta i tangentna duž

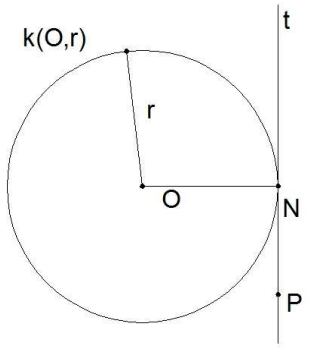
Osvrnimo se na mogućnost 2 na slici 3.
Ako je centralno rastojanje prave p jednako poluprečniku kružnice (ON = r), prava i kružnica imaju samo jednu zajedničku tačku.
Prava p koja je u ravni kružnice, a dodiruje je u jednoj tački (N) naziva se **tangenta (dirka) kružnice**.

Zajednička tačka tangente i kružnice naziva se **dodirna tačka** (N).

Kroz svaku tačku na kružnici može se povući samo jedna tangenta.

Odsečak tangente između bilo koje tačke na njoj i dodirne tačke sa kružnicom naziva se **tangentna duž**.

Na slici 4. prikazana je tangentna duž PN, tangente t.



Slika 4. Tangentna duž

Sečica i tetiva

Ponovo se osvrnimo na sliku 3. Posmatrajmo mogućnost 3.

Ako je centralno rastojanje ON prave p manje od poluprečnika kružnice, prava i kružnica imaju dve zajedničke tačke.

Sečica kružnice je prava koja prolazi kroz kružnicu i seče je u dve tačke.

Duž određena tim dvema tačkama se naziva **tetiva kružnice**.

Svake dve različite tačke na kružnici određuju jednu tetivu.

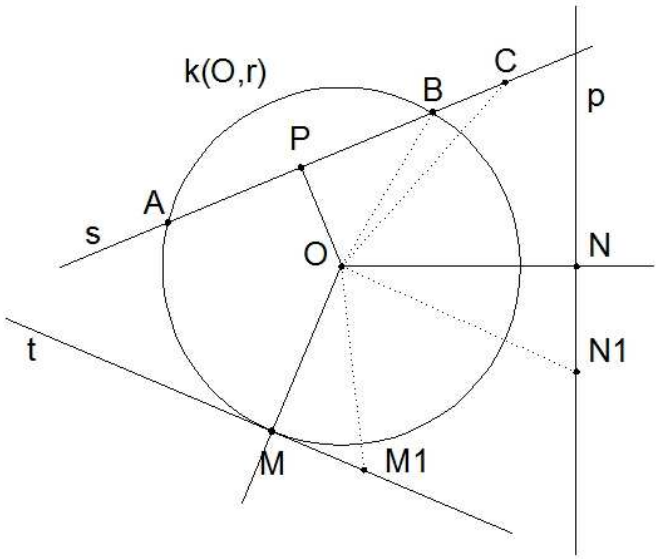
Tetiva koja prolazi kroz centar kružnice je prečnik kružnice.

TEOREME

Teorema T1:

1) Ako je centralno rastojanje prave u odnosu na kružnicu veće od poluprečnika kružnice, prava nema ni jednu zajedničku tačku sa kružnicom;
2) ako je centralno rastojanje prave jednako poluprečniku kružnice prava ima samo jednu zajedničku tačku sa kružnicom;

3) ako je centralno rastojanje prave manje od poluprečnika kružnice, prava ima dve zajedničke tačke sa kružnicom.



Slika 5. Teorema T1

Dokaz:

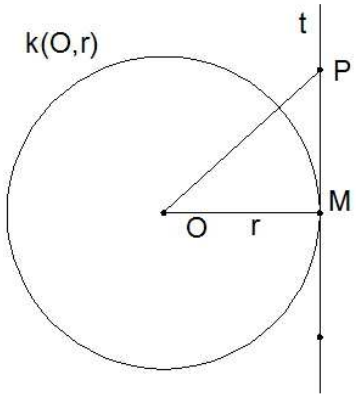
1) Neka je ON centralno rastojanje prave p u odnosu na kružnicu k(O, r), gde je N tačka na toj pravoj. Ako je ON>r tačka N prave p je van posmatranog kruga. Neka je N1 druga tačka na pravoj p. Onda je ON1>ON. Ako je ON1>ON i svaka druga tačka prave p je van kruga jer su to veća rastojanja od centralnog (ON je normala na pravu p), što znači da ova prava nema zajedničkih tačaka sa kružnicom.
2) Neka je OM centralno rastojanje prave t u odnosu na kružnicu k(O,r), gde je M tačka na toj pravoj. Ako je OM=r tačka M prave t nalazi se na kružnici. Kako je OM1>OM iz pravouglog trougla ΔOMM1 svaka druga tačka (M1) prave t je van kruga. Prava t ima, dakle, samo jednu zajedničku tačku sa kružnicom. Za pravu koja ima samo jednu zajedničku tačku sa kružnicom kažemo da dodiruje kružnicu i ova prava zove se tangenta kružnice.
3) Neka je OP centralno rastojanje prave s u odnosu na kružnicu k(O,r), gde je P tačka na toj pravoj. Ako je OP<r podnožje P centralnog rastojanja prave s je u krugu. Dokažimo da u

ovom slučaju dve i samo dve tačke ove prave pripadaju kružnici. .

Dokaz: Pošto tačka P prave s pripada unutrašnjoj oblasti kruga, na pravoj s moraju postojati bar dve tačke A i B koje pripadaju kružnici. Tačka P se nalazi između tačaka A i B. Dokažimo da su ove tačke jedine koje pripadaju kružnici. Pretpostavimo da sem ovih dveju tačaka posmatrane prave i tačka C pripada istoj kružnici. Ako je naša pretpostavka tačna onda mora i trougao ΔOBC biti jednakokraki, kao što je ΔOAB.

Ako je trougao ΔOBC jednakokraki, onda je $\angle OBC$ na njegovoj osnovici BC oštar, jer su uglovi na osnovici jednakokrakog trougla oštri. Međutim, ovaj ugao je uporedan sa uglom $\angle OBA$ ($\angle OBC+\angle OBA=180°$) jer tačke A, B i C pripadaju istoj pravoj, a pošto je ΔOAB jednakokrak onda $\angle OBA$ takođe mora biti oštar. Kako je nemoguće da dva susedna uporedna ugla budu oštra pretpostavka da i tačka C pripada kružnici otpada, što znači da samo tačke A i B pripadaju kružnici. Ova prava s zove se sečica kružnice.

Teorema T2: Tangenta kružnice je normalna na poluprečnik dodirne tačke.

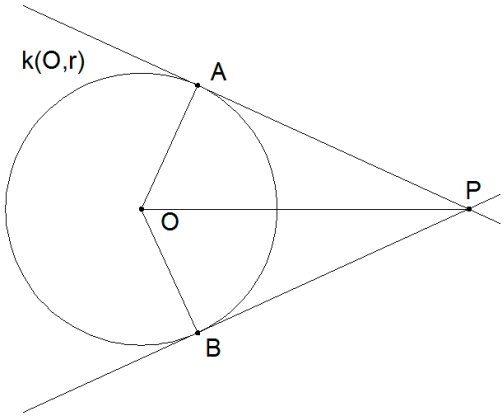


Slika 6. Teorema T2

Dokaz: Pretpostavimo da tangenta nije normalna na poluprečnik OM. Pošto se kroz svaku tačku van date prave može konstruisati normala na tu pravu, a po našoj pretpostavci prava koja sadrži OM to nije, onda će normala na t kroz tačku O biti neka druga prava koja sadrži duž OP. Tada je centralno rastojanje $OP<r$ jer je $OM=r$ pa prava t ima dve zajedničke tačke sa kružnicom na osnovu teoreme T1 pod 3. Kako ovo protivreči da je prava p tangenta kružnice, jer tangenta sa

kružnicom prema definiciji ima jednu zajedničku tačku, to je pretpostavka da tangenta nije normalna na dodirni poluprečnik netačna, čime je teorema dokazana.

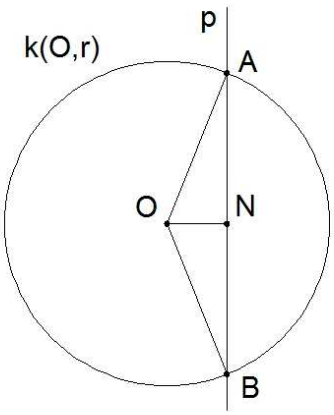
Teorema T3: Tangentne duži konstruisane iz jedne tačke van kružnice na kružnicu su jednake.



Slika 7. Teorema T3

Dokaz: Neka su PA i PB tangentne duži koje odgovaraju tački P. Kako je PA⊥OA i PB⊥OB to je ΔOAP≅ ΔOBP jer su ovo pravougli trouglovi sa zajedničkom hipotenuzom OP i jednakim katetama OA=OB=r. Otuda je PA=PB, čime je teorema dokazana.
Iz ΔOAP≅ΔOBP zaključujemo da je prava OP simetrala ugla koji obrazuju tangente konstruisane na kružnicu iz ove tačke.

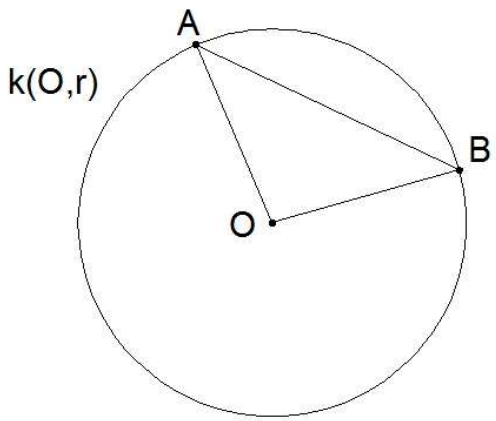
Teorema T4: Prava koja se nalazi u ravni sa kružnicom, a prolazi kroz krajnju tačku jednog njenog poluprečnika i gradi sa njim kosi ugao (oštar ili tup), jeste sečica tog kruga.



Slika 8. Teorema T4

Dokaz: Neka je p prava u ravni kružnice k opisane oko tačke O, A tačka kružnice kroz koju prolazi p i neka su uglovi između p i poluprečnika OA kosi (jedan oštar, drugi tup). Tada je normala ON spuštena iz O na pravu p različita od OA. Neka je N njeno podnožje, a B tačka na p za koju je A-N-B i AN=BN. Trouglovi OAN i ONB su podudarni, jer je AN=BN, ON=ON, ∠ONA=∠ONB (pravi uglovi) dakle i OA=OB. tj. prema definiciji je i B tačka kružnice k. Prema definiciji sečice sledi da je prava p sečica kružnice k.

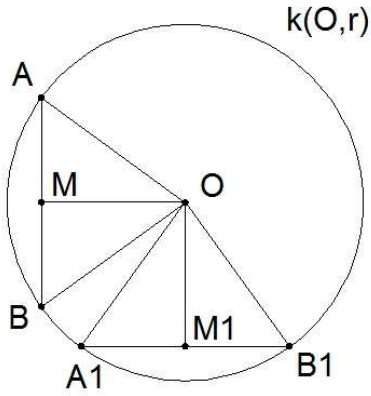
Teorema T5: Prečnici kruga su njegove najveće tetive.



Slika 9. Teorema T5

Dokaz: Prema definiciji tetive prečnici su tetive. Neka je AB tetiva kruga koja nije prečnik, tj. koja ne sadrži središte O kruga. Tada postoji trougao ABO, koji je jednakokrak, jer je OA=OB=r. Prema poznatoj osobini trouglova je OA+OB>AB. No zbir OA+OB jednak je prečniku, dakle tetiva AB je manja od prečnika, i prema tome prečnici su najveće tetive.

Teorema T6. Jednakim tetivama iste kružnice odgovaraju jednaka centralna rastojanja i obrnuto.



Slika 10. Teorema T6

Dokaz: Neka je OM⊥AB i OM1⊥A1B1. Pretpostavimo da je AB=A1B1 i dokažimo da je OM=OM1.

Kako tačke A i B obrazuju jednu tetivu kružnice, to je OA=OB=r. Takođe imamo OA1=OB1=r jer A1 i B1 obrazuju drugu tetivu kružnice. Odatle sledi da su ΔOAB≅ΔOA1B1, na osnovu jednakih stranica. Dalje sledi da je OM visina trougla ΔOAB povučena iz tačke O, a OM1 visina trougla ΔOA1B1 povučena iz tačke O. Kako su ovi trouglovi podudarni, sledi i da su njihove visine podudarne, odakle sledi da je OM=OM1 što je i trebalo dokazati.

DISKUSIJA

U ovom radu je predstavljen osnovni način rada sa teoremama. Prvo su uvedene osnovne definicije i pojmovi vezani za krug i važne prave kruga [1.], [2.]. Zatim su izložene teoreme predstavljene u literaturi [2.], a istinitost teorema je utvrđena izvođenjem dokaza.

Pored tangente koja predstavlja važnu pravu kruga, bitno je uvesti i pojam tangentne duži, koja otvara prostor za uvođenje novih teorema.

Pored sečice kao važne prave kruga, korišćena je i tetiva (duž) kao pojam koji je takođe vrlo značajan u teoremama o krugu.

Korišćene su teoreme kod kojih se za dokaze koristi jednostavan matematički aparat – podudarnost trouglova (jednakost određenih uglova i određenih duži u trouglu).

U literaturi [2.] u dokazu Teoreme T6 korišćen je pojam “homogeni vektori rotacije”. Ovde je dokaz izveden korišćenjem podudarnosti trouglova.

U toku izrade istraživačkog rada uvidom u literaturu [2.]- [4.] utvrđene su dalje smernice za istraživanja u ovoj oblasti. Uvođenjem definicija centralnog i periferijskog ugla kruga može se proširiti broj teorema koje se odnose na krug. Takođe se mogu razmatrati teoreme koje koriste tangentni četvorougao i tetivni četvorougao. Uvođenjem definicije potencije tačke u odnosu na krug otvara se prostor za nove teoreme čiji se dokazi oslanjaju na sličnost trouglova.

ZAKLJUČAK

Krug je možda najsavršenija od svih geometrijskih figura. U ovom radu date su samo neke od teorema vezanih za glavne prave kruga (sečice i tangentu), ali se vidi da čak i ovaj, skroman početak rada sa krugom pruža velike mogućnosti za dalja istraživanja, npr. međusobnog odnosa tangente i sečice, povezivanja glavnih pravih sa uglovima kruga (centralni i periferijski) itd.

LITERATURA

[1.] www.skopalic.edu.rs/t_mydownload/09_10/1-kruznica-i-krug.pps

[2.] Seminarski radovi na temu kruga, studenata Matematičkog fakulteta u Beogradu, profesor Zoran Lučić; 2008.
www.alas.matf.bg.ac.rs/~zlucic/view_doc.php?id=278
www.alas.matf.bg.ac.rs/~zlucic/view_doc.php?id=299
www.alas.matf.bg.ac.rs/~zlucic/view_pdf.php?id=310

[3.] www.benjamin-mills.com/maths/Year11/circle-theorems-proof.pdf

[4.] www.timdevereux.co.uk/maths/geompages/7theorem.html